

वर्ग और वर्गमूल



0853CH06

5.1 भूमिका

आप जानते हैं कि वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा $\times$ भुजा (जहाँ 'भुजा' का अर्थ एक भुजा की लंबाई) होता है। निम्न सारणी का अध्ययन कीजिए :

वर्ग की भुजा (cm में)	वर्ग का क्षेत्रफल (cm ² में)
1	$1 \times 1 = 1 = 1^2$
2	$2 \times 2 = 4 = 2^2$
3	$3 \times 3 = 9 = 3^2$
5	$5 \times 5 = 25 = 5^2$
8	$8 \times 8 = 64 = 8^2$
a	$a \times a = a^2$



संख्याओं 4, 9, 25, 64 और इस प्रकार की दूसरी संख्याओं में क्या विशेष है? चूँकि 4 को $2 \times 2 = 2^2$, 9 को $3 \times 3 = 3^2$ के रूप में व्यक्त कर सकते हैं अतः हम पाते हैं कि इस प्रकार की सभी संख्याओं को उसी संख्या के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। इस प्रकार की संख्याएँ जैसे 1, 4, 9, 16, 25, ... को वर्ग संख्याएँ कहते हैं।

साधारणतया, यदि एक प्राकृत संख्या m को n^2 से व्यक्त किया जाता है, जहाँ n भी एक प्राकृत संख्या है, तब m एक **वर्ग संख्या** है। क्या 32 एक वर्ग संख्या है?

हम जानते हैं कि $5^2 = 25$ और $6^2 = 36$ होता है। यदि 32 एक वर्ग संख्या है, तो यह एक प्राकृत संख्या का वर्ग होना चाहिए जो 5 और 6 के बीच हो। परंतु यहाँ 5 और 6 के बीच कोई प्राकृत संख्या नहीं है। निम्न संख्याओं और उनके वर्गों के बारे में विचार कीजिए :

संख्याएँ	वर्ग
1	$1 \times 1 = 1$
2	$2 \times 2 = 4$



3	$3 \times 3 = 9$
4	$4 \times 4 = 16$
5	$5 \times 5 = 25$
6	-----
7	-----
8	-----
9	-----
10	-----

क्या आप इसे पूरा कर सकते हैं?

उपरोक्त सारणी से क्या आप 1 से 100 के बीच की वर्ग संख्याओं को लिख सकते हैं? क्या 100 तक कोई प्राकृत वर्ग संख्या छूट गई है? आप पाएँगे कि शेष सभी संख्याएँ, वर्ग संख्याएँ नहीं हैं। संख्याएँ 1, 4, 9, 16 वर्ग संख्याएँ हैं। ये संख्याएँ पूर्ण वर्ग संख्याएँ भी कहलाती हैं।



प्रयास कीजिए

1. दी गई संख्याओं के बीच की पूर्ण वर्ग संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

(i) 30 और 40

(ii) 50 और 60

5.2 वर्ग संख्याओं के गुणधर्म

निम्नलिखित सारणी में 1 से 20 तक की वर्ग संख्याओं को दिखाया गया है।

संख्या	वर्ग	संख्या	वर्ग
1	1	11	121
2	4	12	144
3	9	13	169
4	16	14	196
5	25	15	225
6	36	16	256
7	49	17	289
8	64	18	324
9	81	19	361
10	100	20	400

उपरोक्त सारणी में वर्ग संख्याओं का अध्ययन कीजिए। वर्ग संख्याओं का अंतिम अंक (यानी वर्ग संख्याओं के इकाई स्थान का अंक) क्या है? ये सभी संख्याएँ इकाई स्थान पर 0, 1, 4, 5, 6 या 9 पर समाप्त होती हैं। इनमें से किसी भी संख्या के इकाई स्थान पर 2, 3, 7 या 8 नहीं आता है।

क्या हम कह सकते हैं कि यदि एक संख्या 0, 1, 4, 5, 6 या 9 पर समाप्त होती है, तो वह एक वर्ग संख्या होगी? इस बारे में सोचिए।

प्रयास कीजिए

- क्या हम कह सकते हैं कि निम्न संख्याएँ पूर्ण वर्ग संख्याएँ हैं? हम कैसे जानते हैं?
 (i) 1057 (ii) 23453 (iii) 7928 (iv) 222222
 (v) 1069 (vi) 2061
 पाँच ऐसी संख्याएँ लिखिए जिनके इकाई स्थान को देखकर आप बता सकें कि ये संख्याएँ वर्ग संख्याएँ नहीं हैं।
- पाँच ऐसी संख्याएँ लिखिए जिनके इकाई स्थान को देखकर आप नहीं बता सकते कि वे वर्ग संख्याएँ हैं या नहीं।



- निम्न सारणी में कुछ संख्याओं एवं उनके वर्गों का अध्ययन कीजिए और दोनों में इकाई स्थान का निरीक्षण कीजिए :

सारणी 1

संख्या	वर्ग	संख्या	वर्ग	संख्या	वर्ग
1	1	11	121	21	441
2	4	12	144	22	484
3	9	13	169	23	529
4	16	14	196	24	576
5	25	15	225	25	625
6	36	16	256	30	900
7	49	17	289	35	1225
8	64	18	324	40	1600
9	81	19	361	45	2025
10	100	20	400	50	2500

निम्नलिखित वर्ग संख्याएँ अंक 1 पर समाप्त होती हैं :

वर्ग	अंक
1	1
81	9
121	11
361	19
441	21

प्रयास कीजिए

123^2 , 77^2 , 82^2 , 161^2 , 109^2 में से कौन सी संख्या अंक 1 पर समाप्त होगी?



इनके अलावा अगली दो वर्ग संख्याएँ लिखिए जो 1 पर उनकी संगत संख्याओं पर समाप्त होती हैं।

आप देखेंगे कि यदि एक संख्या के इकाई स्थान पर 1 या 9 आता है तब इसकी वर्ग संख्या के अंत में 1 आता है।

- अब 6 पर समाप्त होने वाली संख्या पर विचार कीजिए :

वर्ग	अंक
16	4
36	6
196	14
256	16

प्रयास कीजिए

निम्नलिखित में से कौन सी संख्याओं के इकाई स्थान पर 6 अंक होगा :

- (i) 19^2 (ii) 24^2 (iii) 26^2
 (iv) 36^2 (v) 34^2

हम देखते हैं कि जब कोई वर्ग संख्या 6 पर समाप्त होती है तो वह जिस संख्या का वर्ग है, उसका इकाई अंक या तो 4 या 6 होगा।

क्या आप इस प्रकार के कुछ और नियम, सारणी में लिखी गई संख्याओं एवं उनके वर्गों के अवलोकन से ज्ञात कर सकते हैं (सारणी 1)?

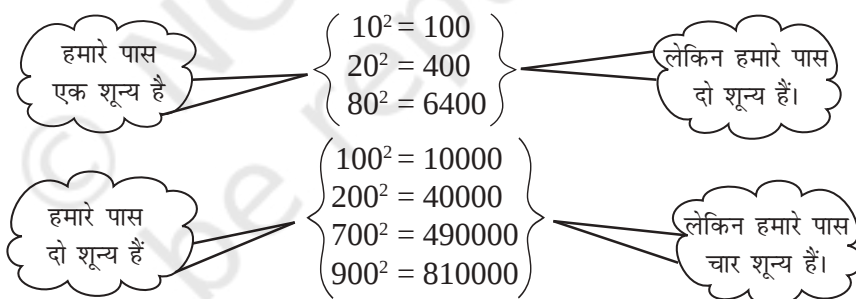


प्रयास कीजिए

निम्नलिखित संख्याओं के वर्ग करने पर उनके इकाई स्थान पर क्या होगा?

- (i) 1234 (ii) 26387 (iii) 52698 (iv) 99880
 (v) 21222 (vi) 9106

- निम्नलिखित संख्याओं और उनके वर्गों पर विचार कीजिए :



यदि एक संख्या के अंत में तीन शून्य हों, तो उसके वर्ग में कितने शून्य होंगे? क्या आपने, संख्या के अंत में शून्यों की संख्या और उसके वर्ग के अंत में शून्यों की संख्या पर ध्यान दिया? क्या आप कह सकते हैं कि वर्ग संख्याओं के अंत में शून्यों की संख्या केवल सम संख्या होती है?

- संख्या और उनके वर्गों के लिए सारणी 1 देखिए।
- सम संख्याओं के वर्गों एवं विषम संख्याओं के वर्गों के बारे में आप क्या कह सकते हैं?



प्रयास कीजिए

- निम्नलिखित में से किन संख्याओं के वर्ग विषम संख्या/सम संख्या होंगे। क्यों?
 (i) 727 (ii) 158 (iii) 269 (iv) 1980
- निम्नलिखित संख्याओं के वर्ग में शून्यों की संख्या क्या होगी?
 (i) 60 (ii) 400